



Name: _____

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Zeitspanne vom Sonnenaufgang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont überschreitet) bis zum Sonnenuntergang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont unterschreitet) wird als Tageslänge bezeichnet. Sie hängt vom Ort ab und ändert sich im Verlauf des Jahres.

In der folgenden *Abbildung 1* sind die Tageslängen in der kleinen ostwestfälischen Stadt Rahden für jeden ersten Tag eines Monats im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 1. Januar 2018 aufgetragen.

Vereinfachend wird hier angenommen, dass alle Monate die gleiche Länge von 30 Tagen haben.

Dabei entspricht $t = 0$ dem 1. Januar 2017, $t = \frac{1}{30} \approx 0,03$ entspricht dem 2. Januar 2017, ...,

$t = 1$ entspricht dem 1. Februar 2017, $t = 1\frac{1}{30} \approx 1,03$ entspricht dem 2. Februar 2017 usw.



Name: _____

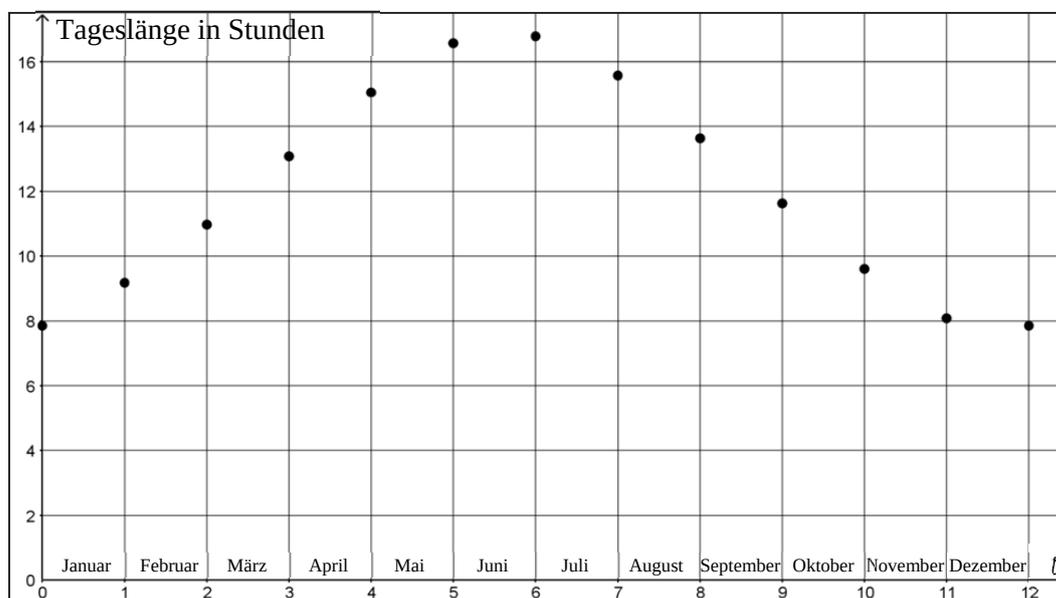


Abbildung 1

Zur Modellierung der Tageslängen in Rahden im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 wird von einem Schüler für $0 \leq t \leq 5,67$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = -0,08 \cdot t^3 + 0,6324 \cdot t^2 + 0,54432 \cdot t + 8, \quad t \in \mathbb{R},$$

verwendet.

Dabei wird $f(t)$ als Tageslänge in Stunden aufgefasst.

a) (1) Ermitteln Sie mit der Funktion f die Tageslänge in Rahden für den heutigen Tag (3. Mai, also $t \approx 4,07$) und vergleichen Sie den von Ihnen berechneten Wert mit der tatsächlichen heutigen Tageslänge in Rahden von 15 Stunden und 10 Minuten.

(2) Zeigen Sie, dass der Wert des Terms $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ kleiner ist als der Wert des Terms

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}, \text{ und interpretieren Sie diese Tatsache im Sachzusammenhang.}$$

(3) Vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 ($t \approx 5,67$) werden nördlich des Äquators (und damit auch in Rahden) die Tage immer länger.

Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Tatsache durch die Funktion f zutreffend modelliert wird.



Name: _____

- (4) Für die zweite Ableitung f'' der Funktion f gilt die folgende Aussage:

$$f''(t) < 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 2,635.$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage für $2,635 < t < 5,67$ unter Berücksichtigung von a) (3) im Sachzusammenhang.

[Hinweis: Ein Nachweis der Aussage ist nicht erforderlich.]

- (5) *Begründen Sie, dass die Funktion f nicht zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr 2017 geeignet ist.*

(4 + 5 + 7 + 3 + 3 Punkte)

- b) Der 21. Juni 2017 ($t \approx 5,67$) ist der längste Tag des Jahres 2017, der 21. Dezember 2017 ($t \approx 11,67$) ist der kürzeste Tag des Jahres 2017 in Rahden.

Eine Freundin des Schülers schlägt vor, zur Modellierung der Tageslängen vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018 für $5,67 \leq t \leq 12$ eine ganzrationale Funktion g dritten Grades zu verwenden, deren Ableitung g' eine quadratische Funktion von folgender Form ist:

$$g'(t) = a \cdot (t - 5,67) \cdot (t - 11,67), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei a eine noch zu bestimmende reelle Zahl ist.



Name: _____

- (1) Skizzieren Sie in *Abbildung 2* die vier zu $a = -0,5$, $a = -0,25$, $a = 0,25$ und $a = 0,5$ gehörenden Graphen von g' .

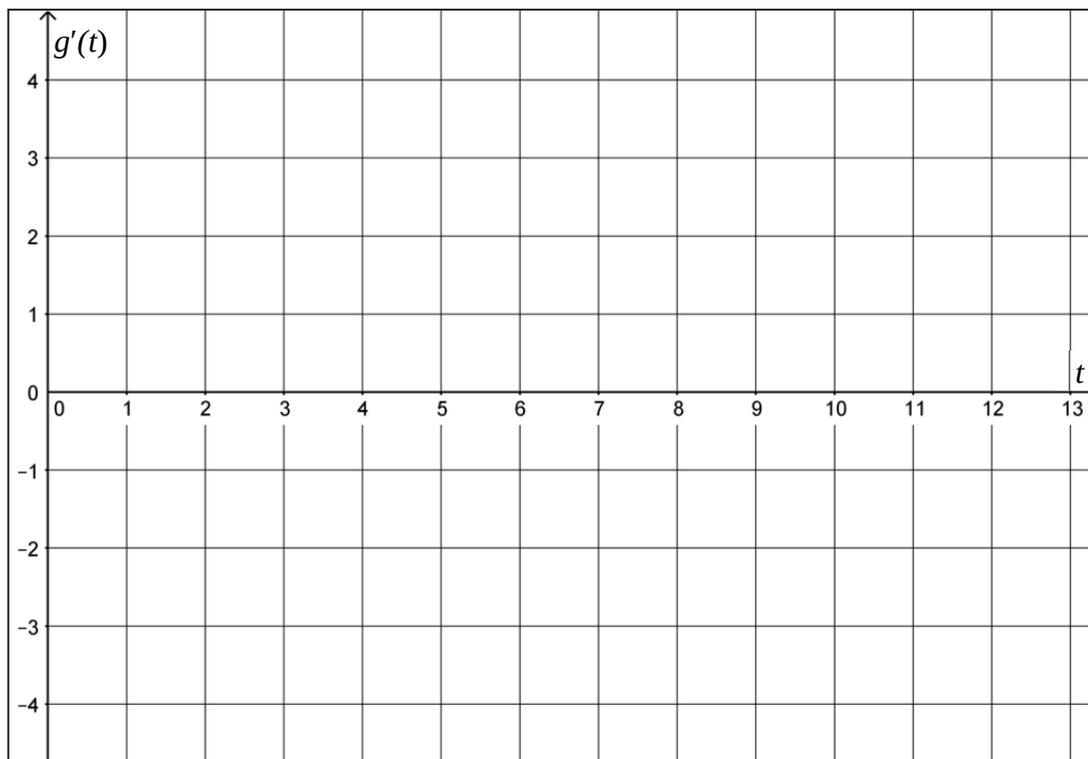


Abbildung 2

- (2) Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, von dem Ansatz $g'(t) = a \cdot (t - 5,67) \cdot (t - 11,67)$ auszugehen, wenn die Tageslängen ab dem 21. Juni 2017 durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades modelliert werden sollen.

Entscheiden Sie begründet, ob a zur Modellierung des gegebenen Sachzusammenhangs positiv oder negativ sein muss.



Name: _____

- (3) Die Freundin des Schülers hat herausgefunden, dass am 21. Dezember 2017 die Tageslänge in Rahden 7,73 Stunden beträgt. Um den passenden Wert von a zu bestimmen, verwendet sie die Gleichung

$$f(5,67) + a \cdot \int_{5,67}^{11,67} (t-5,67) \cdot (t-11,67) dt = 7,73.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie den passenden Wert von a .

(4 + 6 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung